Musterlösung zum Aufgabenblatt 10 (Analytische Geometrie)

Aufgabe 1

(a)
Aus dim $B_1 <$ dim $B_2 <$ dim B_3 folgt:
dim $V_{B_1} <$ dim $V_{B_2} <$ dim V_{B_3}.
Mit $B_1||B_2$ folgt $V_{B_1} \subseteq V_{B_2}$.
Mit $B_2||B_3$ folgt $V_{B_2} \subseteq V_{B_3}$.
Insgesamt folgt $V_{B_1} \subseteq V_{B_3}$, also $B_1||B_3$.

Fall dim $B_1 =$ dim $B_2 =$ dim B_3:
Aus $B_1||B_2$ folgt $V_{B_1} \subseteq V_{B_2}$ oder $V_{B_2} \subseteq V_{B_1}$und mit $n < \infty$ und dim $B_1 =$ dim B_2 folgt schließlich $V_{B_1} = V_{B_2}$. Ebenso $V_{B_2} = V_{B_3}$. Damit gilt $V_{B_1} = V_{B_3}$ also $B_1||B_3$.
Im unendlichen Fall ist der letzte Schluss jedoch falsch, wie das nachfolgende Beispiel belegt:

(b)
Betrachte $\mathcal{V} =$ Vektorraum der ganzrationalen Funktionen sowie den affinen Raum $A = \mathcal{A}(V)$.
Es gilt: dim $\mathcal{V} = \infty$.

Definiere jetzt folgende Mengen:
$\mathcal{V}_1 := \{a_1x^3 + a_2x^6 + a_3x^9 + \ldots | a_i \in \mathbb{R}\}$
$\mathcal{V}_2 := \{b_1x^{12} + b_2x^{24} + b_3x^{36} + \ldots | b_i \in \mathbb{R}\}$
$\mathcal{V}_3 := \{c_1x^4 + c_2x^8 + c_3x^{12} + \ldots | c_i \in \mathbb{R}\}$
$\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$ sind Vektorräume (nicht leer und abgeschlossen bzgl. "+" und "·").

Folgende Punktmengen B_1, B_2, B_3 sind affine Unterräume von A:
$B_1 := x \oplus \mathcal{V}_1$, $B_2 := x^2 \oplus \mathcal{V}_2$, $B_3 := x^3 \oplus \mathcal{V}_3$.
Es gilt $B_1 \| B_2$ wegen $V_2 \subseteq V_1$ und $B_2 \| B_3$ wegen $V_2 \subseteq V_3$, **aber**:
$B_1 \not\parallel B_3$, weil $V_1 \not\subseteq V_3$ und $V_3 \not\subseteq V_1$.