

## Denken in Strukturen II

- DiS: Funktionsbegriff – innere Verknüpfungen
  - GuT:
    - Schlichte und vollständige Graphen
    - Satz 3 (Leßner S.15): Jeder schlichte Graph (der nicht nur aus einer Ecke besteht) besitzt mindestens zwei Ecken gleichen Grades
    - Beispiele: Begrüßungsproblem, Modelle von vollständigen Graphen
    - Satz 4 (Leßner S.15): Jeder vollständige Graph mit  $n$  Ecken besitzt  $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$  Kanten
    - Reguläre Graphen vom Grad  $r$
    - Satz 5 (Leßner S.16): Zu jeder Eckenzahl  $n$  und jeder nat. Zahl  $r < n$  gibt es einen schlichten regulären Graph vom Grade  $r$  (noch kein Beweis)
- 

- GuT:
  - Satz 5: Beweis für den ersten Fall
  - 2. Fall: Begriff des Komplementärgraphen (-> Eigenarbeit)
  - Satz 6 (Leßner S.17): Zu jeder ungeraden Zahl  $n$  und jeder beliebigen geraden Zahl  $r < n$  existiert ein schlichter, regulärer Graph vom Grad  $r$  mit  $n$  Ecken (-> Übung)

- ElZT:
    - Primzahlerzeugende Funktionen
    - Teilerbegriff
    - Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie
    - Primfaktorzerlegung: Unendliches Produkt von Primzahlen
    - Teilbarkeitskriterium (ohne Beweis)
    - Teilmengen
    - Menge der gemeinsamen Teiler
    - Definition von ggT
- 

- DiS:
    - Definition Gruppe
    - > Komm. Gruppe, Beispiele für Gruppen (Eigenarbeit).
  - ElZT:
    - Die Menge  $M = \{1, 5, 10, 15, 20, \dots\}$  als Beispiel, dass der Hauptsatz der ElZT nicht immer gültig ist.
    - > Suche weitere Zahlen ( $\neq 100$ ), die mehrdeutige Primfaktorzerlegungen besitzen (Eigenarbeit).
    - ggT mit Hilfe von Primfaktorzerlegung: Zahlenbeispiel und Satz mit Beweis.
    - > 2. Teil des Beweises (Eigenarbeit)
    - Vielfache, gemeinsame Vielfache (mit Beispielen)
    - Def. von kgV mit Zahlenbeispiel
- 

- Wiederholung der letzten Stunde - insbesondere die Mengen  $M_1 = \{1, 5, 10, 15, \dots\}$  und  $M_2 = \{1, 3, 6, 9, \dots\}$
- ElZT:
  - Euklidischer Algorithmus: Nur Subtraktionsalgo. angesprochen -> Padberg (Eigenarbeit)
- BA:
  - Verbände: Wiederholung: Def. Verband

- Beispiel:  $(\mathbb{R}, \min, \max)$ . Beweis des Assoziativgesetzes.  $\rightarrow$  Absorptionsges.  
(Eigenarbeit)

---

- Wiederholung der letzten Stunde:
    - ggT-Bestimmung mit Hilfe von Schnittmengen
    - ggT-Bestimmung mit Hilfe der Primfaktorzerlegung
  - Euklidischer Algorithmus - Subtraktionsverfahren; Summenregel der Teilbarkeit
  - Algorithmus und Flussdiagramm zum Subtraktionsverfahren
  - DiS:  
Injektive, surjektive und bijektive Funktionen. Umkehrfunktion. Verkettung/Verknüpfung von Abbildungen  $\rightarrow$  Eigenarbeit
  - BA:  
Distributive Verbände
- 

- BA:  
Beispiel eines Verbandes: Der Untergruppenverband
  - DiS: Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks  
 $\rightarrow$  Eigenarbeit: Verknüpfungstabelle ausfüllen; Untergruppen finden
  - BA:  
Komplementäre distributive Verbände - Boolesche Algebra. Beispiele/Gegenbeispiele: Min-Max-Verband, Mengenverband.
  - LdL: Rechnen mit Booleschen Termen  
 $\rightarrow$  Eigenarbeit: Übersetzen der Axiome der Booleschen Algebra in die Mengenalgebra und Veranschaulichung (z.B. durch Venn-Diagramme).
- 

- Wiederholung:  
Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks.  
 $\rightarrow$  Eigenarbeit: Untergruppen in der Symmetriegruppe finden.
  - LdL: Rechnen mit Booleschen Termen, speziell:  $(a+c)(a+d)(b+c)(b+d) = ab + cd$
  - Gesetze der Booleschen Algebra:  
Satz 1:  $a \cdot a = a$  und  $a + a = a$ . Veranschaulichungen mit Hilfe von Mengendiagrammen  
 $\rightarrow$  Eigenarbeit: Satz 2 - Satz 5 (Jehle, S. 52/53)
  - LdL: Herleiten von Gesetzen der Booleschen Algebra aus den Axiomen.  
Absorptionsgesetz III lässt sich aus V,IV,I und VI herleiten (genaue Rechnung).  
 $\rightarrow$  Eigenarbeit: Das komplementär Element zu einem Element  $a$  ist eindeutig bestimmt (siehe PP-Präsentation).  
Erfüllungsmengen bei Gleichungen über der Grundmenge  $V = \{w, f\}$  bzw. über der Menge aller Teiler der Zahl 30 (Jehle S. 58/9+10) .
- 

- Wiederholung: Untergruppen der Symmetriegruppe  $S$  des Dreiecks; Satz 2-5 (Jehle)
- $(S, \cap, \sqcup)$  ist ein Verband:
  - Kommutativität (trivial)
  - Assoziativität (an einem Beispiel demonstriert)
  - Absorptionsgesetz ( $\rightarrow$  Eigenarbeit)

- LdL: Schaltalgebra:
  - Reihen- und Parallelschaltungen. Negationsschalter.
  - 2. Beispiel aus Jehle (Abb. 5.12) -> Eigenarbeit
  - UND-Gatter, ODER-Gatter. Beispiel: Die Funktion:  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_1\bar{x}_2$
  - 2. Beispiel aus Jehle (Abb. 5.12) mit Gatterdarstellung: -> Eigenarbeit

---

- DiS:
  - Äußere Verknüpfung (Beispiele aus *Basieux*: -> Eigenarbeit)
  - Abbildungen zwischen Mengen mit algebraischen Strukturen - Homomorphismus, Isomorphismus (auch nachlesen in *Basieux*: -> Eigenarbeit)
  - Beispiel aus der Schulmathematik:  
 $\log : (\mathbb{R}^+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$   
 $a \rightarrow \log(a)$
  - praktische Anwendung durch den Rechenschieber: Multiplikation zu zweier Zahlen
  - Satz von Stone: Jeder endliche Boolesche Verband ist isomorph zu einem Mengenverband
  - Beispiele:
    1.  $(V, \cdot, +)$  mit  $V = \{0, 1\}$  ist isomorph zu  $(P(E), \cap, \cup)$ , wo  $E$  eine einelementige Menge ist (-> Eigenarbeit - siehe Jehle S. 47/48).
    2.  $(V, \cdot, +)$  mit  $V = T(30)$  ist isomorph zu  $(P(E), \cap, \cup)$  mit  $E = \{a, b, c\}$ . Angabe der bijektiven Abbildung. Berechnung eines Beispiels (zur Verknüpfung  $\cap$ ). Weiteres Beispiel (zur Verknüpfung  $\cup$ ): -> Eigenarbeit.
- BA:
  - LdL: Gatterdarstellung von Schaltungen. Beispiel: Abb 5.13 aus Jehle. Übersetzung der Gatterdarstellung 5.13 in eine Schalterdarstellung: -> Eigenarbeit

---

- Bestimmung des Streckungsfaktors (Inkugel und Umkugel bei einem Würfel): -> Eigenarbeit
- Wiederholung: Logische Schaltungen und Isomorphismus zwischen  $T(30)$  und  $P(M)$  mit  $M = \{a, b, c\}$ 
  - > Eigenarbeit: Erstellen eines Isomorphismus zwischen  $T(210)$  und  $P(M_1) = \{a, b, c, d\}$
  - > Eigenarbeit: die Funktion:  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2) \cdot (x_1x_3 + \bar{x}_1x_2) \cdot (\bar{x}_2 + \bar{x}_3)$ . -> Eigenarbeit: Leitwerttabelle für diese Funktion zu Ende ausfüllen.
- LdL: Schaltalgebra
  - Binärwort, Binärcode
  - "normaler" Binärcode verglichen mit dem 3-Exzeßcode zur binären Verschlüsselung der Dezimalziffern
  - -> Eigenarbeit: Tabelle der beiden Codes dazu zu Ende ausfüllen.
  - $f(x_1, x_2) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_1) \cdot (x_1x_2 + \bar{x}_1) = x_1x_2 + \bar{x}_1$ .
  - -> Eigenarbeit: Erstellen zweier Leitwert-Tabellen zu obiger Funktion.
  - Aufstellen und vereinfachen des Funktionsterm zur Gatterdarstellung Jehle S. 65/5.16: -> Eigenarbeit
- Die unendliche Hierarchie unendlicher Mengen:
  - Begriff der Äquivalenz von zwei Mengen  $A$  und  $B$ :  $a \sim B \Leftrightarrow$  es gibt eine bijektive Abbildung  $A \rightarrow B$
  - Bei endlichen Mengen: Äquivalenz = gleiche Elementanzahl
  - Beispiel für Äquivalenz unendlicher Mengen:  $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

---

- Die unendliche Hierarchie unendlicher Mengen:
  - Die Mengen  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$
  - Abzählbarkeit von  $\mathbb{Q}$ : Cantorsches 1. Diagonalverfahren.
  - Abzählbarkeit von  $\mathbb{Q}$  mit Hilfe des Begriffs *Höhe einer rationalen Zahl*
  - Hotel Transfinital (= Hilberts Hotel) -> Eigenarbeit: Scheid S. 178/12

- LdL: Boolesche Funktionen
  - Boolesche und binäre Funktionen
  - Binäre Funktionen mit ein bzw. zwei Variablen: -> Eigenarbeit: Jehle S.68/69