Mathematik und ihre Didaktik WS 02/03
W. Neidhardt

Einführung in mathematisches Denken und mathematische Beweisführung I

- Mind-Mapping-Diagramm: Grundlegende Beweisprinzipien (Bew) - Elementare Zahlentheorie und Algorithmen (ElZT) - Aufbau des Zahlsystems (ZS) - Denken in Strukturen (DiS) - Aussagenlogik (Log) - Graphentheorie und Topologie (GT) - Ausgewählte mathematische Themen (MaT)

- Bew: Prinzip vom kleinsten Element. Natürliche Zahlen, ganze Zahlen, Mengenschreibweise bei Zahlenmengen. Aufgabe: Natürliche Zahlen auf einer Zahlengeraden, die jeweils das arithmetische Mittel der Nachbarzahlen darstellen. Beweis, dass nur die Lösung "alle Zahlen sind gleich" in Frage kommt.
  Prinzip vom kleinsten Element exakt aufgeschrieben.

  Übungsaufgaben: *Bartholome/Rung/Kern, Zahlentheorie für Einsteiger*: S. 4/ 1 (a),(b),(c)

- ZS: Rationale Zahlen. Darstellung (Mengenschreibweise). Gewöhnliche Brüche und Dezimalbrüche. Umrechnen von endlichen und periodischen Dezimalbrüchen in gewöhnliche Brüche. Geometrische Folgen und Reihen. Summenformel: $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$. Umrechnung von $0,\overline{3}$. Rationale und irrationale Zahlen. Wie unterscheiden sich irrationale Zahlen in der Dezimaldarstellung von rationalen?
  Bew: $\sqrt{2}$ ist irrational. Beweis durch Widerspruch mit Hilfe zahlentheoretische Argumente - z.B.: das Quadrat zweier ungerader Zahlen ist wieder eine ungerade Zahl.

  Übungsaufgaben:
  1. Beweisen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe, dass gilt: $0,\overline{9} = 1$.
  2. Wie rechnet man $0,234\overline{853}$ in einen gewöhnlichen Bruch (mit Bruchstrich) um? Begründen Sie und geben Sie allgemein ein Verfahren an, wie man periodische Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche umwandelt.
  3. Neben der üblichen "dezimalen" Intervallschachtelung, bei der die Länge jedes Intervalls $\frac{1}{10}$der Länge des vorangegangenen beträgt, sind auch "duale" Intervallschachtelungen üblich, die durch fortgesetzte Halbierung entstehen. Geben Sie die ersten 6 Intervalle einer solchen dualen Intervallschachtelung für $\sqrt{2}$ an.

- ZS: Veranschaulichung und Berechnung der geometrischen Reihe $\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^i$.
  Bew: $\sqrt{2}$ ist irrational. Beweis durch Widerspruch mit Hilfe des Prinzips vom kleinsten Element.
  ElZT: Altägyptische Multiplikation : Verfahren an Beispielen, Algorithmus in Worten und als Flussdiagramm.

  Übungsaufgaben:
  Siehe nächste Seite !

1. Schreiben Sie einen Algorithmus (z.B. Flussdiagramm) zur dualen Intervallschachtelung für die Zahl $\sqrt{a}, a > 0$.

2. Veranschaulichen und berechnen Sie die geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^i$.

3. Schreiben Sie das Programm eins_n.html um, so dass ungerade Zahlen von 1 bis n aufgelistet werden.
4. Beweisen Sie auf zwei Arten, dass $\sqrt{5}$ irrational ist.

- ZS: Stellenwertsysteme
  Ein kurzer Blick zurück: Entwicklung von Zahlsystemen. Römische Zahlen, Abakus. Stellenwertsystem. Zahlenwert und Stellenwert einer Ziffer.

- Division mit Rest: Satz und Beweis der Existenz und Eindeutigkeit.

- b-adische Stellenwertsysteme - Umrechnung der Zahl 25 (Basen 1 bis 26).

  Übungsaufgaben:
  1. Schreiben Sie ein Programm zum altägyptischen Multiplikationsalgorithmus. Als Vorlage können Sie die Datei altaegy.html (siehe Homepage) verwenden.

  2. Stellen Sie die Zahl 49 in Stellenwertsystemen mit den Basen $2, 3, 4, \ldots, 12$ dar.

  3. Wandeln Sie ins Dezimalsystem um: $(234)_6, (z0e)_{12}, (110010)_2$

  4. Die in der Existenzaussage des Satzes von der *Division mit Rest* gegebene Konstruktion des Elements r ist auch gültig für die Fälle, wo $a = b$ oder $a < b$ ist. Geben Sie für diese beiden Fälle die im Satz genannten Größen q und r an.

- Log: LdL Aussagenlogik. Aussage, Aussageform, Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit. Beschreibung von Aussagen durch Quantoren.

- ZS: Stellenwertsysteme
  Satz von der eindeutigen Darstellbarkeit einer natürlichen Zahl in einem Stellenwertsystem der Basis $b > 1$. Beweis der Existenz (konstruktiv).

- Zahlenratespiel (Zahlen 1-15)

- Algorithmus: Umrechnung einer Zahl vom Dezimalsystem ins b-adische System.

  Übungsaufgaben:
  1. Zeigen Sie: Die Stellenwertschreibweise einer Zahl a ist bei gegebener Basis b **eindeutig** bestimmt

  2. Erweitern Sie das Zahlenratespiel für Zahlen von 1 bis 31 .

- Log: LdL Negation - UND-Verknüpfung - ODER-Verknüpfung

- ZS: Algorithmus zur Umrechnung von b-adisch nach dezimal (ausführlich)

- Altägyptisch modern: Im Dualsystem

  Übungsaufgaben:
  1. Schreiben Sie ein Javascript-Programm zum Algorithmus b-adisch → dezimal

2. Aufgaben aus *Jehle, Boolsche Algebra*, S. 10 + S. 19/20 (bis einschließlich 3a)

- Log: LdL Implikationsverknüpfung
- ZS: Computersubtraktion (auch im Dualsystem)
- ZS: Axiomatische Begründung der natürlichen Zahlen (PEANO-Axiome)
- Bew: Beweis einer Aussage A(n) für alle nat. Zahlen mit Hilfe des Prinzips vom kleinsten Element

  ---

  Übungsaufgaben:
  1. Aufgaben aus *Jehle, Boolsche Algebra*, S. 20

  2. Betrachten Sie folgendes Muster von Dreieckszahlen sowie die Ergänzung zu Rechtecken (unteres Bild). Entwickeln Sie eine Formel für die Summe der Zahlen $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ (Vermutung) und beweisen Sie, dass die Formel für alle natürlichen Zahlen gilt, indem Sie eine Ungültigkeitsmenge einführen und das Prinzips vom kleinsten Element anwenden:

- Log: LdL Bijunktion - Äquivalenz
- Bew: Die 4 Arten des indirekten Beweisens:
  Beweis durch Kontraposition (K), Widerspruchsbeweise W1 - W3. Tautologiebeweis für W1. Beispiele zu K und W1 (Umkehrung des Satzes von Thales, Winkel im Viereck).

  Übungsaufgaben:
  1. Aufgaben aus *Jehle, Boolsche Algebra*, S. 20

  2. Beweis durch Widerspruch: Zeigen Sie die Äquivalenz zu W2 bzw. W3 mit Hilfe von Wahrheitstafeln.

  3. Zeigen Sie den 2. Fall beim Beweis der Umkehrung des Satzes von Thales (siehe Vorlesung).

- DiS: LdL Mengenalgebra: Begriff der Menge (Cantor; Widersprüche - Dorfbarbierbeispiel). Schreibweise. Gleichheits- und Teilmengenrelation. Leere Menge
- Widerspruchsbeweise: Beispiel zu W2

  Übungsaufgaben:
  1. Beweisen Sie den Satz vom Inkreis im Viereck zu Ende (siehe Vorlesung Prinzip W2).

2. Versuchen Sie mit dem Beweisprinzip W3 zu beweisen:
Sind zwei verschiedene Geraden parallel, so besitzen sie keinen Schnittpunkt
Hinweis: Parallelität wurde hierbei folgendermaßen definiert: 2 Geraden der Ebene heißen parallel, wenn sie von einer 3. Geraden senkrecht geschnitten werden. Verwenden Sie den Winkelsummensatz im Dreieck.

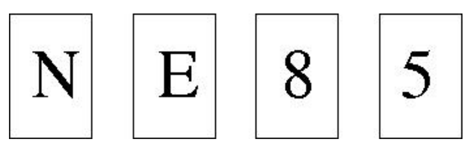
- Log: Notwendige und hinreichende Bedingung mit Beispielen

- Bew: Beweisprinzip der vollständigen Induktion. Abgrenzung zur ”empirischen” Induktion, die in den Naturwissenschaften (z.B. Physik) üblich ist. Beispiele: Winkelsumme im konvexen Polygon; Summenformel für ungerade Zahlen.

Übungsaufgaben:
1. Geben Sie für B je eine
(a) notwendige aber nicht hinreichende
(b) hinreichende aber nicht notwendige
(c) notwendige und hinreichende
Bedingung A an und begründen Sie:

(i) B:= Das Viereck ist ein Parallelogramm
(ii) B:= Die Zahl ist durch 12 teilbar

2. Wir spielen mit vier Karten. Jede hat auf einer Seite einen Buchstaben und auf der anderen eine natürliche Zahl. Die Karten liegen so vor uns:



a) Satz: *Wenn auf einer Kartenseite ein Vokal steht, dann steht auf der Rückseite eine gerade Zahl*
Man soll möglichst wenige Karten wenden, um zu entscheiden, ob der Satz wahr oder falsch ist. Welche Karten muss man wenden?

b) Welche Karten muss man wenden, um den Kehrsatz von a) zu überprüfen?

c) Welchen Satz überprüft man, wenn man die Karten **E** und **8** wendet?

3.
a) Eva: ”Adam, wann besuchst du mich endlich?”
Adam: ”Wenn ich zu dir radle, muss das Wetter schön sein.”
Nach einem prächtigen Tag:
Eva: ”Adam, gestern war schönes Wetter, aber du bist nicht gekommen. Warum hältst du dein Versprechen nicht?”

Beurteilen Sie und argumentieren Sie aus mathematischer Sicht unter Verwendung der Begriffe ”notwendig” bzw. ”hinreichend”

b) Toni: ”Bei Föhn habe ich immer scheußliches Kopfweh.”
Tino: ”Aber heute ist doch kein Föhn! Warum klagst du?”

Beurteilen Sie und argumentieren Sie aus mathematischer Sicht unter Verwendung der Begriffe ”notwendig” bzw. ”hinreichend”

- Vollständige Induktion: Beweis der Summenformel für $1 + 2 + \ldots + n$. Auch: Geschichte von Gauß. Geometrische Reihe mit Induktion.

- DiS: LdL Mengenalgebra: Potenzmengen (Anzahl der Elemente: 2^n), Produktmenge

  Übungsaufgaben:
  1. Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit vollständiger Induktion: Die Potenzmenge einer Menge mit n Elementen hat 2^n Elemente. Dabei kommt es darauf an, den Beweis vollständig ausformuliert aufzuschreiben!

  2. Finden Sie eine Formel für $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.
  Tipp: Die Formel für die Summe $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ kann verwendet werden.

- DiS: LdL Mengenalgebra: Komplement und Differenzmenge
- Vollständige Induktion: Versuch, eine Ungleichung zu beweisen
- DiS: Relationen (Definition und Beispiele)

  Übungsaufgaben:
  1. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:
  $$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} \ldots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} < \frac{1}{2}$$
  2. Aufgaben 7, 8, 11, 12 aus *Jehle, Boolsche Algebra*, S.34

- MaT: Entdeckungen rund um das PASCAL-Dreieck
- DiS: LdL Mengenalgebra: Durchschnitt- und Vereinigungsmengen

  Übungsaufgaben:
  1. Im Pascal-Dreieck lassen sich die Zahlen der (n+1)-ten Zeile wie folgt berechnen:
  $$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\ ,\ 1 \leq k \leq n$$
  Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:
  Die Summe der Zahlen der n-ten Zeile des Pascal-Dreiecks ergibt 2^n

  2. Aufgaben 9, 10, 15 aus *Jehle, Boolsche Algebra*, S.34/35

- DiS: LdL Mengenalgebra: Gesetze der Mengenalgebra
- Übersetzung: Mengenalgebra $\leftrightarrow$ Aussagenlogik
- Beweise der Gesetze der Mengenalgebra durch Wahrheitswertetafeln

  Übungsaufgaben:
  Aufgaben 13, 14 , 21, 22 aus *Jehle, Boolsche Algebra*, S.34/35