

Übungen zu Mathematik und Didaktik I

Plenumsübung: Einfache Algorithmen mit JAVAscript

1 $\sqrt{5}$

Beweisen Sie mit Hilfe des *Prinzips vom kleinsten Element*, dass $\sqrt{5}$ irrational ist.

2 Zahlen von 1 bis n

Studieren Sie das JAVASCRIPT-Programm eins_n.html

3 Ungerade Zahlen von 1 bis n

Schreiben Sie ein Flussdiagramm und ein JAVASCRIPT-Programm, das die ungeraden Zahlen von 1 bis n ausgibt.

Es folgen *keine* weiteren Aufgaben mehr! Nutzen Sie die Zeit und studieren Sie die in der Vorlesung angegebene Literatur!

Abgabetermin: **8.11.02** in der Übung

Übungen zu Mathematik und Didaktik I

4 Altägyptisch Multiplizieren

Schreiben Sie ein Programm zum "altägyptischen Multiplikationsalgorithmus". Sie können als Vorlage die Datei altaegy.html (siehe Homepage) verwenden.

5 Division mit Rest

Studieren Sie den Beweis zum Satz "Division mit Rest" (Existenz und Eindeutigkeit - nur nach dem Prinzip vom kleinsten Element), so dass Sie in der Lage sind, diesen in der Übung vorzuführen (falls Fragen auftauchen, wenden Sie sich bitte an mich!).

6 Stellenwertsysteme

- Stellen Sie die Zahl 49 in Stellenwertsystemen mit den Basen $2, 3, 4, \dots, 12$ dar.
- Wandeln Sie ins Dezimalsystem um: $(234)_6, (z0e)_{12}, (110010)_2$

7 Eindeutige Zahldarstellung

Studieren Sie den Beweis zum Satz 2 (Padberg S. 96 - **eindeutige** Darstellung einer natürlichen Zahl im b -adischen System), so dass Sie in der Lage sind, diesen in der Übung vorzuführen (falls Fragen auftauchen, bitte Kontakt mit mir aufnehmen!).

8 Zahlenratespiel

Erweitern Sie das Zahlenratespiel für Zahlen von 1 bis 31.

9 Umrechnung dezimal \rightarrow b -adisch

Schreiben Sie ein Javascript-Programm zum Algorithmus *Umrechnung einer Zahl dezimal \rightarrow b -adisch* (Vorlage siehe Homepage!).

10 Addition im 4er-System

Aufgabe S. 34/51 aus *Bartholome/Rung/Kern, Zahlentheorie für Einsteiger*

11 Multiplikation im Dualsystem

Aufgabe S. 34/52 aus *Bartholome/Rung/Kern, Zahlentheorie für Einsteiger*

12 Zahlssystem der Mayas

Zur Erklärung des Maya-Systems siehe S. 34 aus *Bartholome/Rung/Kern, Zahlentheorie für Einsteiger*.

- (a) Verwandeln Sie ins Maya-System und schreiben Sie mit Maya-Ziffern: 3350, 788533, 1992
- (b) Entwickeln Sie einen Algorithmus (Flussdiagramm) für die Umwandlung einer Zahl vom Dezimalsystem ins Mayasystem. Zur Vereinfachung: Wählen Sie 0 bis 9 für die ersten Maya-Ziffern und die ersten Buchstaben des Alphabets für die Mayaziffern 10, \dots , 19.

13 Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation

Studieren Sie den Beweis zum Satz 1 der Vorlesung (Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation), so dass Sie in der Lage sind, diesen in der Übung vorzuführen (falls Fragen auftauchen, bitte Kontakt mit mir aufnehmen!).

14 Beweise

- (a) Beweisen Sie:
Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:
 $a|b \Leftrightarrow |a| \mid |b|$
- (b) Beweisen Sie:
Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt: $a|b$ und $a|(b+c) \Rightarrow a|c$
- (c) Beweisen oder widerlegen Sie:
 $d|ab \Rightarrow d|a$ oder $d|b$

15 Teilermenge

Entwickeln Sie einen Algorithmus und schreiben Sie ein Javascript-Programm, das die Elemente einer Teilermenge $T(a)$ der natürlichen Zahl a berechnet und die Suche spätestens bei \sqrt{a} beendet.

Hinweis: Sie finden eine Vorlage fürs Programmieren auf meiner Homepage!

16 Märchenzahl

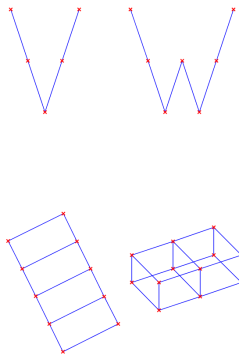
Schreibt man eine beliebige dreistellige Zahl X zweimal nebeneinander, so entsteht die Zahl $Y = XX$. Die 6-stellige Zahl Y ist für jedes X durch 7, 11 und 13 teilbar. Warum?

17 Hasse 1

Geben Sie zu $a = 27, 30$ und 108 jeweils die Teilmengen $T(a)$ an und zeichnen Sie dazu Hassediagramme.

18 Hasse 2

Füllen Sie die folgenden vier Hassediagramme mit Zahlen aus \mathbb{N} aus:



19 Unterrichtseinheit

Studieren Sie Kap. A) Kennzeichen und Grundsätze effektiver Übungen im Mathematikunterricht der Hauptschule aus *H. Leutenbauer, Das praktische Handbuch für den Mathematikunterricht in der Hauptschule, Bd.1*

Entwerfen Sie eine Unterrichtseinheit (= Unterrichtsstunde) zum Thema *Teilmengen und Primzahlen*.

Orientieren Sie sich dabei auch an 2.2 und 2.3 aus dem oben genannten Buch.

20 Achilles und die Schildkröte

- Nach wie vielen Kilometern holt Achilles die Schildkröte ein, wenn diese einen Vorsprung von 1 km hat und Achilles 10 Mal so schnell wie die Schildkröte läuft?
- Geben Sie sich eine (einigermaßen realistische) Geschwindigkeit des Achilles vor und berechnen Sie den Zeitpunkt (wenn beide um 12 Uhr einen Kilometer entfernt voneinander starten), bei dem Achilles die Schildkröte einholt.

21 Primzahlen - Bausteine der natürlichen Zahlen

Studieren Sie vom Kapitel *IV Primzahlen - Bausteine der natürlichen Zahlen* aus Padberg, Zahlentheorie und Arithmetik, die Seiten 65 - 71

22 Zerlegungen

- Bestimmen Sie jeweils alle Zerlegungen von 180 als Produkt von 2, 3, 4 oder 5 Faktoren.
- Bestimmen Sie 3 möglichst verschiedene Zerlegungsbäume von 360. Dabei sollen von einer Zahl immer nur 2 Äste abzweigen.

23 Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie

Begründen Sie (ohne die Produkte auszumultiplizieren), welche der folgenden Produkte auf jeden Fall verschiedene Ergebnisse liefern:

(a) $4 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 20 \cdot 25$

(b) $6 \cdot 17 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 25$

(c) $8 \cdot 22 \cdot 24 \cdot 30$

(d) $8 \cdot 12 \cdot 26 \cdot 15$

24 Zahlenwelt D

Führen Sie in der Zahlenwelt $D = \{1, 3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$ die Begriffe *Teiler in D* und *Primzahl in D* ein, und überprüfen Sie, ob die Primfaktorzerlegung zusammengesetzter Zahlen in D eindeutig ist.

Abgabetermin: **10.1.03** in der Übung

25 Fibonacci

Informieren Sie sich über den Mathematiker Fibonacci und verfassen Sie eine kurze Informationsschrift.

26 Bonatschi-Zahlen

Studieren Sie nochmals den Zahlenteufel (Kap. 6) und schreiben Sie alle vorkommenden Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen mathematisch exakt (mit Hilfe von Gleichungen) auf. Verwenden Sie b_1, b_2, \dots, b_k zur Bezeichnung der 1., 2., \dots , k. Fibonacci-Zahl.

27 Virtueller Gedankenleser

Erklären Sie mit Mitteln der Zahlentheorie, warum und wie der virtuelle Gedankenleser funktioniert - siehe

http://did.mat.uni-bayreuth.de/~wn/WS_02_03/Zahlentheorie/gedankenleser.html

28 Vollständige Induktion

Ähnlich wie bei den "dreieckigen" Zahlen kann man figurierte "quadratische" Zahlen betrachten (siehe Zahlenteufel - Ende von Nacht 6). Stellen Sie eine Formel für $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + n$ auf und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

29 Anzahl der Teiler

Formulieren Sie eine Aussage über die Anzahl der Teiler von

a) $p^3 \cdot q^2 \cdot r$

b) $p^m \cdot q^n \cdot r^s$

mit paarweise verschiedenen Primzahlen p, q und r und $m, n, s \in \mathbb{N}$. Begründen Sie diese Aussage.

30 Pascal-Dreieck

- (a) Zeigen Sie, dass sich im Pascal-Dreieck die Zahlen der $(n+1)$ -ten Zeile wie folgt berechnen lassen:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad 1 \leq k \leq n$$

- (b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

Die Summe der Zahlen der n -ten Zeile des Pascal-Dreiecks ergibt 2^n

Hinweis: Man darf die Formel aus (a) verwenden!

31 Primzahl-Kriterium

Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass das Primzahlkriterium in der Zahlenwelt D nicht richtig ist:

$$D = \{1, 3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$$

32 4-D-Würfel

Informieren Sie sich über 4-D-Würfel im Internet!

Zeichnen Sie einen 4-D-Würfel und dazu das Hasse-Diagramm der Teilmengen einer geeigneten Zahl ($\neq 210$)

33 ggT

Bestimmen Sie jeweils drei verschiedene Lösungen:

(a) $\text{ggT}(24, \quad) = 6$

(b) $\text{ggT}(\quad, 18) = 3$

(c) $\text{ggT}(\quad, \quad) = 4$

34 Wahr oder falsch?

Entscheiden Sie, ob wahr oder falsch und begründen Sie:

- (a) Zwei gerade Zahlen sind nie teilerfremd. (b) Zwei ungerade Zahlen sind immer teilerfremd. (c) Zwei aufeinander folgende Zahlen sind stets teilerfremd.

Abgabetermin: **24.1.03** in der Übung

35 1992

Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n so, dass $n+1992$ ein Teiler von n^2+1992 ist.

Tipp: Führen Sie zunächst eine Polynomdivision durch.

36 $n^2 + m^2$

Zeigen Sie: Ist 3 Teiler von $n^2 + m^2$, so teilt 3 sowohl n als auch m .
Gilt auch die Umkehrung des Satzes?

37 Euklidischer Algorithmus

Entwerfen Sie ein Flussdiagramm und schreiben Sie ein JavaScript-Programm zum Euklidischen Algorithmus nach der Subtraktionsmethode. Als Vorlage können Sie die Datei `euklid_vorlage.html` verwenden - siehe:

http://did.mat.uni-bayreuth.de/~wn/WS_02_03/MuD/euklid_vorlage.html

38 $T(a) \cap T(b) = T(b) \cap T(a - b)$

Es sei $a > b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$.

Beweisen Sie den Satz 1: $T(a) \cap T(b) = T(b) \cap T(a - b)$ (aus der Vorlesung) zu Ende.

39 Zahlenteufel: Kehrproblem

Formulieren Sie das *Kehrproblem* (8. Nacht) allgemein (n Schüler einer Klasse, k sollen kehren) und entwickeln Sie eine Formel. Begründen Sie diese und überlegen Sie sich eine schülergerechte Vorgehensweise.

40 Stellenwertsysteme

Studieren Sie die Internetseite zum Thema Stellenwertsysteme (siehe meine Homepage) und schreiben Sie bitte eine kurze Kritik an:

`manfred.bauch@uni-bayreuth.de`

Abgabetermin: **31.1.03** in der Übung