Mathematik und ihre Didaktik | WS 04/05
W. Neidhardt | Übungsblatt 9

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

Aufgabe 1 **6 Punkte**

Fast-pythagoreische Dreiecke (Teil 2):

(a) Sei (a, b) ein Lösungspaar für fast-rechtwinklige gleichschenklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen und es gelte $a, b \in \mathbb{Z}$ und $1 < a + b\sqrt{2}$.
Zeigen Sie, dass dann gilt: $a, b > 0$.
Tipp: Fallunterscheidung: 1) $a < 0, b > 0$ *, 2) . . . , 3) . . . , 4) . . .*

(b) Sei (x, y) ein Lösungspaar mit $x, y \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $x + y\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$ gilt.
Man erwischt mit dieser Methode also alle Lösungspaare!
Tipp: Zeigen Sie zunächst: Wenn man $x+y\sqrt{2}$ *durch* $(3+2\sqrt{2})$ *teilt, bekommt man wieder eine Lösung* (u, v)*; diese ist "kleiner" als* (x, y).

(c) Entwerfen Sie ein Flussdiagramm zur Berechnung aller Seitenlängen von fast-rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen bis zum maximalen Exponenten n unter Ausnutzung des Ergebnisses von Teilaufgabe (b).

(d) Schreiben Sie ein JavaScript-Programm für dieses Problem.

Aufgabe 2 **6 Punkte**

Bestimmen Sie alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ so, dass $2^n + 1$ Quadratzahl ist.

Aufgabe 3 **12 Punkte**

Studieren Sie **Pad** III/1. und 2. (S.30 - 33) und bearbeiten Sie S. 32/3. und S. 33/2.

Aufgabe 4 **6 Punkte**

Zeigen Sie, dass es unendlich viele Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gibt, für die gilt:
13 teilt $(4n^2 + 1)$

Aufgabe 5 **6 Punkte**

(a) Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen, so dass $(n+1)$ Teiler von (n^2+1) ist.

(b) Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen, so dass $(n + 2003)$ Teiler von $(n^2 + n + 2003)$ ist.

Tipp: Polynomdivision

Abgabetermin: **10.1.05** vor der Vorlesung