

## Nach TIMSS und vor PISA – Gedanken zum Mathematikunterricht

Peter Baptist, Bayreuth

Herrn Kollegen Walsch mit Dank für viele wertvolle Anregungen

Internationale Vergleichsuntersuchungen haben Schule und Bildung in die Schlagzeilen der Presse gebracht. Öffentlichkeit und Lehrerschaft wurden aufgerüttelt, Schule findet nicht mehr ausschließlich hinter verschlossenen Türen statt. Insbesondere im deutschen Mathematikunterricht zeigte sich eine Kluft zwischen Anspruch und Wirklichkeit.

Einigkeit besteht darin, diese Kluft möglichst rasch zu beseitigen; nicht weil weitere Vergleichsuntersuchungen anstehen und Deutschland sich im Ranking nach oben arbeiten möchte, sondern weil unser Unterricht gehaltvoller werden muss: weniger Kalkül-Orientierung, mehr Verständnis-Orientierung. Der Mathematikunterricht muss daher inhaltlich und methodisch so konzipiert sein, dass gerade die Schüler davon profitieren, die im späteren (Berufs-)Leben höchstens indirekt mit Mathematik in Berührung kommen.

### WOVON HÄNGT DIE QUALITÄT DES UNTERRICHTS AB?

Die Qualität des Unterrichts ist nicht in erster Linie abhängig von dem Stoff, der unterrichtet wird, sondern von der Art und Weise, wie mit dem Stoff umgegangen wird.

Die “Schule” ist ein abstrakter Begriff; die konkreten Faktoren sind “Schüler” und “Lehrer” (. . .). Es kommt wohl überhaupt nicht darauf an, *was* man lehrt, sondern *wie* es gelehrt wird. Man kann, scheint mir, auch durch *klassische* Schulbildung recht gut auf modernes Leben vorbereitet werden; der Unterricht müsste nur danach sein!

Heinrich Mann, 1891

Es geht nicht primär um methodische Rezepte, sondern es geht um veränderte Einstellungen gegenüber den stofflichen Inhalten und es geht um eine Veränderung im Rollenverständnis von Schülern und Lehrern. “The best way to learn is to do, the worst way to teach is to talk” stellt der amerikanische Mathematiker Paul HALMOS fest. Trotz dieser oftmals bestätigten Erkenntnis, dass man am besten durch eigenes Handeln und am wenigsten durch reines Zuhören lernt, redet der Lehrer in der Regel 60 bis 80 Prozent der Unterrichtsstunde selbst, er “belehrt”

also, und bestenfalls tun die Schüler so, als hörten sie zu. Gemäß dem Motto von Wilhelm Busch: “Wenn alles schläft und einer spricht, den Zustand nennt man Unterricht.” Trotz zusätzlicher persönlicher Anstrengungen werden keine besseren Ergebnisse erzielt. Frustration macht sich breit. Ein Lehrer, der sich nahezu alles und den Schülern nahezu nichts zutraut, ist schlichtweg überfordert. Ein Unterricht, bei dem der Lehrer fast ausschließlich allein agiert, fördert zudem

- keine Argumentationsfähigkeit,
- keine Kooperationsfähigkeit,
- keine Eigenständigkeit.

Alles dies sind aber Fähigkeiten, die immer wieder in Zielvorstellungen genannt werden. Dennoch ändert sich kaum etwas am ineffektiven Unterrichtskonzept. Mit der kurzsichtigen Argumentation “wir müssen unseren Stoff durchbringen” werden fast alle sinnvollen Vorschläge abgeblockt. Aber Reduzierungen der Lehrplaninhalte würden auch nicht viel nützen. Denn wenn sich die Art und Weise des Unterrichtens nicht ändert, bringt auch eine Reduktion des Stoffes nichts. Am unterrichtlichen Vorgehen müssen wir ansetzen, dies ist der entscheidende Punkt.

Wir müssen uns klar machen: Wichtiger als Vollständigkeit des Wissens gemäß einem vorgegebenen Stoffplan (die doch nie erreicht werden kann) und wichtiger als die Kenntnis einer Fülle von Einzelfakten ist der Zugang zum Verständnis für die charakteristische Art des Denkens und Problemlösens in der Mathematik. Um dieses zu erreichen, müssen repräsentative Beispiele ausgewählt und sorgfältig erarbeitet werden.

Wir sind immer noch bei der Gestaltung des Unterrichts. *Lehrergeleitet* soll er, muss er sein bei unseren vorgegebenen Rahmenbedingungen. Aber dies schließt eine aktive, eigenständige Beteiligung der Schüler nicht aus. Bei der Unterrichtsplanung sollte man sich u.a. auch von folgender Überlegung leiten lassen: Vielleicht würden die Schüler vieles eher verstehen, wenn die Lehrer nicht ständig versuchten, ihnen alles bis ins kleinste Detail zu erklären.

Es muss Zeit bleiben für eigene Gedankengänge. Denn Verständnis kann nicht willkürlich herbeigeführt werden, es kann aber durch geeignete Angebote angeregt werden. Und zwar durch Angebote, die das Fragen, Vermuten, Formulieren, Argumentieren, Ausprobieren, Überprüfen, Anwenden stimulieren. Wie wichtig beispielsweise das Fragenstellen gerade für mathematisches Arbeiten ist, betont Georg CANTOR (1845 - 1918). Er spricht sogar von der *Kunst des Fragestellens*. Mit dieser Kunst werden unsere Schüler nur selten vertraut gemacht. In seiner mündlichen Doktorprüfung im Jahr 1867 stellt Cantor u.a. die These auf:

In re mathematica ars proponendi questiones  
pluris facienda est quam solvendi.

In der Mathematik ist die Kunst des Fragestellens  
öfter gebräuchlich als die des Lösens.

Fragestellen bedeutet Neugierde, und Neugierde wiederum ist die Voraussetzung, um zu neuen Erkenntnissen zu gelangen. Wer Fragen stellt, legt seine Passivität ab, er wird aktiv. Ein Mathematikunterricht, der lediglich aus dem Beantworten von Fragen besteht, die der Lehrer stellt (und die die Schüler nie stellen würden), ist ziemlich langweilig und ermöglicht auch keine Einblicke in mathematische Arbeitsmethoden.

Wir müssen wegkommen von vorgefertigtem Faktenwissen. Die Schüler müssen Gelegenheiten erhalten, eigene Erfahrungen zu sammeln. Wenn Schule dazu da ist, dass Kinder etwas lernen, dann muss man ihnen zu allererst beibringen, **wie** man lernt. Und das nicht theoretisch, sondern an konkreten Inhalten der jeweiligen Fächer. Denn:

Denken lernt man nicht an Regeln zum Denken,  
sondern am Stoff zum Denken.

Um den Unterricht effektiver zu gestalten, muss die Art des Lehrens und Lernens geändert werden. In Anlehnung an Erich WITTMANN konzentrieren wir uns auf folgende Aspekte bzw. Unterrichtsbeteiligte:

- Schülerinnen und Schüler:  
Weniger Objekte der Belehrung, sondern mehr Subjekte des Lernens.
- Lehrerinnen und Lehrer:  
Weniger Vermittler von Wissen, sondern mehr Initiator und Moderator von Lernprozessen.
- Fach:  
Weniger vorgefertigte Inhalte, sondern mehr Gestaltungsmöglichkeiten innerhalb vorgegebener Rahmen.
- Ziele:  
Weniger Reproduktion von Wissen, sondern mehr Gelegenheiten zur Entwicklung von Ideen und aktiv-entdeckendem Lernen.

## WIE KÖNNEN WIR KONKRET VERÄNDERUNGEN BEWIRKEN?

Sicher nicht, indem wir den gängigen Unterricht pauschal verurteilen und einen gänzlich anderen fordern. Dies ist auch gar nicht notwendig. Eine Vorgehensweise der kleinen Schritte ist angesagt, getreu den Worten Hartmut v. HENTIGS: “Die Schritte können klein sein, wenn die Ideen groß genug sind.”

Das Lösen – oder besser gesagt – das Bearbeiten von Aufgaben prägt den Mathematikunterricht. Dies zeigt sich auch deutlich an dem starken Interesse der Schulen im BLK-Modellversuch *Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts* an dem Modul *Weiterentwicklung der Aufgabekultur*. Der Begriff “Kultur” wird derzeit zwar überstrapaziert, aber er kennzeichnet treffend, was wir u.a. dringend brauchen: eine Veränderung beim Bearbeiten von Aufgaben. Das bedeutet nicht, bisherige Aufgaben lediglich durch andere zu ersetzen.

Es ist etwas nicht schon deshalb besser,  
weil es anders ist,  
wenn aber etwas besser werden soll,  
dann muss es anders werden.

G.C. Lichtenberg (1742 - 1799)

Eine veränderte Aufgabekultur bedeutet vor allem, einen veränderten Umgang mit Aufgaben: *Weg vom bloßen Lösen der Aufgaben, hin zu einem Beschäftigen mit den Aufgaben*. Das bedeutet im Einzelnen:

- Die Aufgaben werden anschaulich dargeboten und inhaltlich intensiv diskutiert.
- Es sollen Aufgaben behandelt werden, die auf verschiedene Arten gelöst werden können oder mehrere Lösungen besitzen.
- Die Lösungswege und -strategien sind ebenso wichtig wie die Lösungen selbst.
- Auch falsche Lösungswege werden diskutiert und als Lernmöglichkeiten genutzt.

Im gegenwärtigen Mathematikunterricht befasst man sich zu sehr mit Formeln und Rechnungen, die von den Schülern oft ohne jede Einsicht angewandt bzw. durchgeführt werden. Ein zentrales Problem ist die Tatsache, dass viele Schüler nicht verstehen, was sie tun!

Oder man trifft in vielen Schulbüchern auf sinnentleerte Aufgabenplantagen. Für wen oder was mag ein solches Vorratsüben gut sein?

$$\frac{2x - 11}{7x + 35} + \frac{4 - 3x}{2x + 3} + \frac{3x + 4}{2x + 10} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{x - 2}{x + 3} + \frac{4x - 3}{2 - x} - \frac{7 - 6x}{2x - 4} + \frac{x + 5}{0,2x + 0,6} = 5$$

$$\frac{0,5x}{2x - 3} + \frac{2x + 3}{x + 2} = \frac{x}{4x - 6}$$

$$\frac{x + 4}{x + 2} + \frac{8}{x^2 - 4} = \frac{2x - 2}{x - 2}$$

$$\frac{2}{2x - 3} + \frac{2x + 4}{2x + 3} - \frac{6}{9 - 4x^2} = 0$$

$$\frac{11}{x^2 - 25} + \frac{3x - 9}{5 - x} + \frac{2x + 28}{3x + 15} = 0$$

$$\frac{x}{4x + 10} + \frac{10x^2 - 30x + 6}{4x^2 - 25} - \frac{3x - 2}{x + 2,5} + \frac{x^2 + 1}{x^2 - 6,25} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3x + 2}{2x - 1} + \frac{x + 1}{6x + 3} = 2 - \frac{4x^2 - 22x - 11}{12x^2 - 3}$$

Ein Kennzeichen für die zu starke Kalkülorientierung des Unterrichts ist auch die weitverbreitete Art und Weise der *Leistungserhebung*. Wenn von einer hinreichend großen Zahl von Schülern eine ausreichende Menge von Aufgaben *bekanntem Typs* richtig gelöst wird, so gilt der Unterricht als erfolgreich. Viel zu selten wird gefragt bzw. überprüft

- wie gut die Schüler das neu erworbene Wissen tatsächlich verstanden haben, d.h. wie sinnvoll und stabil sie die neuen Informationen in ihr bisheriges Wissen eingebunden haben,
- wie souverän die Schüler mit den neu erlernten Methoden, Begriffen und Regeln umgehen können,
- wie flexibel die Schüler das Gelernte bei ungewohnten Problemstellungen nutzen können.

Ein Beschäftigen mit Aufgaben an Stelle eines sturen Lösens nach einer vorgegebenen Methode lässt sich schon durch geringfügige Modifikationen an Standardformulierungen initiieren, wie Wolfgang HENN an folgendem Beispiel aufzeigt:

Bei einem Rechteck mit den Seiten  $a$  und  $b$  und mit dem Umfang 25 cm ist die eine Seite um 3 cm länger als die andere. Wie lang ist die Seite?

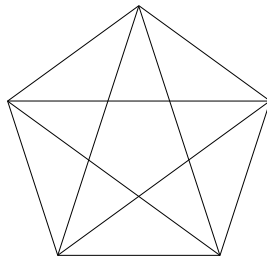
Stelle zunächst eine Gleichung auf.

Bei einem Rechteck mit dem Umfang 25 cm ist die eine Seite um 3 cm länger als die andere.

Zeichne das Rechteck.

Die zweite, eher *offene* Formulierung der Aufgabe provoziert geradezu verschiedene Zugänge bzw. unterschiedliche Lösungsmethoden. Sie regt aber auch zusätzliche Aktivitäten an.

Wir betrachten ein weiteres Beispiel. Den Schülern wird folgende Konfiguration präsentiert:



- Zunächst stellt der Lehrer Fragen, wie z.B.
  - Welche Figuren lassen sich in der Konfiguration entdecken?
  - Wie lässt sich die Konfiguration herstellen?
  - Welche Symmetrien liegen vor?
  - Wie lassen sich Symmetrieeigenschaften durch geeignetes Einfärben der Teilflächen verändern?
- Anschließend überlegen sich die Schüler weitere Fragen, die mit der Konfiguration zusammenhängen.
- Dieser Fragenkatalog wird mit der Klasse diskutiert und – falls erforderlich – nach gewissen Gesichtspunkten geordnet bzw. hinterfragt:
  - Was ist interessant an dieser Frage?
  - Welche Lösungswege bieten sich an?
  - Welche zusätzlichen Kenntnisse oder Materialien sind erforderlich?

- Einige der diskutierten Frage- und Problemstellungen werden von den Schülern bearbeitet.

Ein Beschäftigen mit Aufgaben bedeutet auch das Nutzen der jeweiligen Aufgabe als eine Art Problemkeim, indem die Schüler lernen, Fragen folgender Art zu stellen:

- Lässt sich die Aufgabenstellung erweitern, verallgemeinern?
- Welche neuen Erkenntnisse bringt mir diese Aufgabe bzw. deren Lösung?
- Mit welchen bekannten Stoffinhalten lässt sich die Aufgabe bzw. deren Ergebnis vernetzen?
- Lässt sich die Aufgabe in ein übergeordnetes Konzept einbauen?

Diese Vorschläge sind erste Schritte, die wegführen von einer vorgefertigten Mathematik und hinführen zu einem lebendigen Umgang mit der Mathematik. Es geht um ein *produktives Üben* in Verbindung mit inhaltlichen und allgemeinen Lernzielen. Wir können mit unseren Bemühungen um eine veränderte Auffassung von Lehren und Lernen nur dann Erfolg haben, wenn es gelingt, diese Ideen und Vorschläge systematisch in den Unterricht einzubeziehen. Einzelaktionen von einzelnen Lehrern in einzelnen Jahrgängen sind aus verschiedenen Gründen zum Scheitern verurteilt.

Wir brauchen weiterhin eine veränderte Einstellung der Schulaufsichtsbehörden und der Öffentlichkeit zu Unterricht und schulischer Leistung. Eine Effizienzsteigerung des Mathematikunterrichts lässt sich nicht durch Schlagworte und spektakuläre Zeitungsüberschriften bewirken. Sie geschieht nur durch gemeinsame konkrete Detailarbeit, die in der Regel völlig unspektakulär abläuft. Dazu brauchen die Schulen Unterstützung, und zwar durch alle an Schule interessierte gesellschaftliche Kreise und Institutionen. Ganz im Sinne von Paul HALMOS fordern wir:

Don't preach facts, stimulate acts.